

Title	微分方程式 $d^2g/dx^2=xmg$ ノ解二就テ
Author(s)	早田, 文一
Citation	全国紙上数学談話会. 127 p.159-p.162
Issue Date	1937-04-19
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74491">https://doi.org/10.18910/74491</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

566. 微分方程式  $\frac{d^2 g}{dx^2} = x^m g$  の解 = 就テ

早 田 文 一

有理型函数, *defekt problem* = 関連シテ出テクル  
微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 g}{dx^2} = P(x) g \quad P(x): \text{多項式}$$

ノ解 = ツイテハ、*asymptotische Entwicklung* = ヨリ  
性質が詳シクワカツテキルノデアリマスカラ、次ニ述ベル様  
ナコトハ此ニニ過ヤナイ次第ナス。函数論ノ演習問題トシテ  
御覧下サイ。

(1) = 於テ  $P(x)$  ノ次数ヲ  $m$  トスレバ  $g(x)$  ハ階数  $\frac{m+2}{2}$   
ナル整函数 = ナルコトハ上述ノ *asymptotische Entwick-*  
*lung* = ヨリワカツテキマスガ、コレヲ古典的ノ *Koeffizien-*  
*ten abschätzung* = ヨツテ証明セント努メマシタ。特ニ  
 $P(x) = x^m$  ナルトキハ次ノヤウニ簡單ニ出来マスガ、コレ  
ハ一般ノ多項式 = ナリマスニ未定係数ノ組合セガ複雑ニナツ  
テウマク行キマセン。

$$g(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + \dots$$

ト置キ (1) = コレヲ入レテ後同巾ノ係数ヲ比較スルト

$$(n+2)(n+1) C_{n+2} = C_{n-m} \quad n \geq m$$

$$C_2 = C_3 = \dots = C_{m+1} = 0$$

$$\text{故ニ } C_{n+2} = \frac{C_{n+2-(m+2)}}{(n+2)(n+1)} = \frac{C_{n+2-2(m+2)}}{(n+2)(n+1)(n+2-(m+2))(n+2-(m+2)-1)} \dots$$

$$= \frac{C_{n+2-k(m+2)}}{(n+2)(n+1)(n+2-(m+2))(n+2-(m+2)-1)\cdots(n+2-(k-1)(m+2))(n+2-(k-1)(m+2)-1)}$$

但シ  $K(m+2) < n+2 \leq (K+1)(m+2)$

トスル。

$$(K-1)(m+2) < n+2-1(m+2) \leq (K+1-1)(m+2)$$

$$(K-1)(m+2) \leq n+1-1(m+2) < (K+1-1)(m+2)$$

従ッテ

$$\begin{aligned} |C_{n+2}| &< \frac{|C_\alpha|}{(K(m+2))^2((K-1)(m+2))^2\cdots(m+2)^2} \\ &= \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K}(K!)^2} \end{aligned}$$

但シ  $\alpha(n) = n+2-k(m+2)$

$$\begin{aligned} |C_{n+2}| &> \frac{|C_\alpha|}{((K+1)(m+2))^2(K(m+2))^2\cdots(2(m+2))^2} \\ &= \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K}((K+1)!)^2} \end{aligned}$$

Stirling, 公式  $K! \sim K^K e^{-K} \sqrt{2\pi K} = \text{ヨリ充分大ナル } K$   
ニ就イテハ

$$\begin{aligned} \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K} K^{2K} e^{-2K} 2\pi K} &> |C_{n+2}| \\ &> \frac{|C_\alpha|}{(m+2)^{2K} (K+1)^{2(K+1)} e^{-2(K+1)} 2\pi(K+1)} \end{aligned}$$

$$2K \log(m+2) + 2K \log K - 2K + \log(2\pi K) - \log|C_\alpha|$$

$$< \log \frac{1}{|C_{n+2}|} < 2K \log(m+2) + 2(K+1) \log(K+1)$$

$$-2(K+1) + \log(2\pi(K+1)) - \log|C_n|$$

$$\begin{aligned} \text{一方 } (K+1)(m+2) \log\{(K+1)(m+2)\} &> (n+2) \log(n+2) \\ &> K(m+2) \log\{K(m+2)\} \end{aligned}$$

ニツノ不等式ヲ辺々ワツテ  $K \rightarrow \infty$  ナラシムレバ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \log(n+2)}{\log \frac{1}{|C_{n+2}|}} = \frac{m+2}{2}$$

但シ上ノ結果ハ  $C_n(n) \neq 0$  ナル  $n =$  就イテノミ成立スル。

$g(x)$  ノ Ordnung  $\rho$  ハ公式:

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \log(n+2)}{\log \frac{1}{|C_{n+2}|}}$$

$=$  ヲツテ

$$\rho = \frac{m+2}{2}$$

$C_n$  ハ  $n = \nu(m+2)$  又ハ  $n = \nu(m+2) + 1$  ナルトキニ限ツテ 0 トナラナシ。故ニ  $g(x)$  ハ次ノ様ニ展開ニナル。

$$g(x) = c_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{(m+2)\nu} + c_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{(m+2)\nu} \cdot x$$

$$g_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{(m+2)\nu}$$

$$g_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{(m+2)\nu} \cdot x$$

ト置ケバ  $g_0(x)$ ,  $g_1(x)$  ハ微分方程式 (1) ノ Fundamental-lösungen ナル。  $a_{\nu}$ ,  $b_{\nu}$  ハ上ノ計算ヨリ正ノ実数デア

ルコトガワカルカラ、実軸ノ正ノ部分ハ  $g_0, g_1 =$  トツテ  
*chemin de determination*  $\infty$  デアル。

$m+2$  が偶数ナルトキハ  $g_0$  ハ 炭ノ実軸ニ亦 *chemin de*  
*determination*  $\infty$  = 持ツ。